X

Enseignant·e·s: Dovi, Huruguen, Khukhro
Algèbre Linéaire - CMS
12 janvier 2024
Durée : 105 minutes

Contrôle 2 (Corrigé)

SCIPER : **XXXXXX**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 11 questions et 8 pages, les dernières pouvant être vides. Il y a 27 points au total. Ne pas dégrafer.

- Posez votre carte d'étudiant sur la table et vérifiez votre nom et votre numéro SCIPER sur la première page.
- **Aucun** document n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout outil électronique est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :
  les points indiqués si la réponse est correcte,
  0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à encre **noire ou bleu foncé** et effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Si une question est erronée, l'enseignant se réserve le droit de l'annuler.
- Les dessins peuvent être faits au crayon.
- Répondez dans l'espace prévu (**aucune** feuille supplémentaire ne sera fournie).
- Les brouillons ne sont pas à rendre: ils ne seront pas corrigés.

Respectez les consignes suivantes | Observe this guidelines | Beachten Sie bitte die unten stehenden Richtlinien

choisir une réponse | select an answer
Antwort auswählen

ne PAS choisir une réponse | NOT select an answer
NICHT Antwort auswählen

Corriger une réponse | Correct an answer
Antwort korrigieren

ce qu'il ne faut **PAS** faire | what should **NOT** be done | was man **NICHT** tun sollte

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 (1 point) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire donnée par :

$$f(x, y) = (x - y, -2x + 2y).$$

Lequel des énoncés suivants est vrai ?

- [ ] $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1, 1))$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, 2))$
- [ ] $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((-1, 2))$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, -1))$
- [x] $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1, 1))$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, -2))$
- [ ] $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1, -2))$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, 1))$
- [ ] $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((1, 2))$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, -1))$
- [ ] $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((-1, 1))$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, 2))$

Correction : En réécrivant $f(x, y) = (x - y)(1, -2)$ on voit que $\mathrm{Ker}(f)$ a pour équation $x - y = 0$ et que $\mathrm{Im}(f)$ est engendré par $(1, -2)$.

Question 2 (1 point) Soit $\mathcal{B} = v_1, v_2$ une base de $\mathbb{R}^2$, et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est donnée par :

$$[f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lequel des énoncés suivants est vrai, quelque soit le choix de $\mathcal{B}$?

- [ ] $[f(v_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- [ ] $[f(v_1)]_{\mathcal{B}_{can}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- [ ] $[f(v_1)]_{\mathcal{B}_{can}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- [x] $[f(v_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$
- [ ] $[f(v_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- [ ] $[f(v_1)]_{\mathcal{B}_{can}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

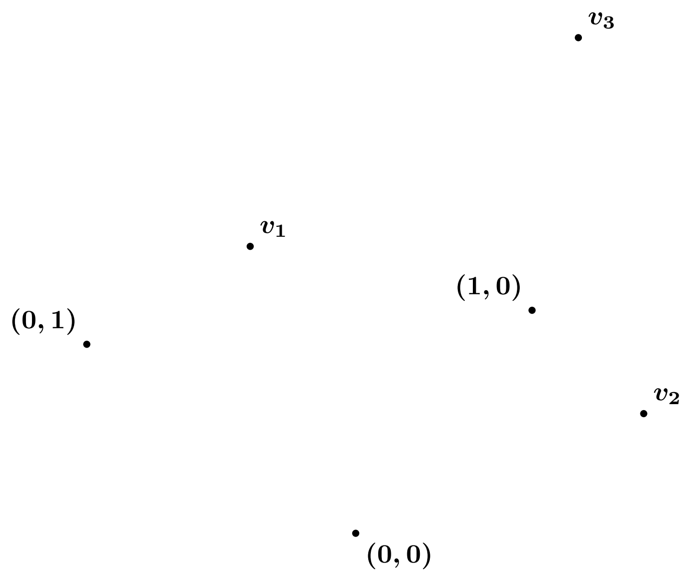
Correction : $[f(v_1)]_{\mathcal{B}}$ est la première colonne de la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$.

Question 3 (2 points) Parmi les énoncés suivants, lequel est vrai ? Il existe une application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que ...

- [x] $(1, 0) \in \mathrm{Ker}(f)$ et $(1, 0) \in \mathrm{Im}(f)$
- [ ] $(1, 1), (1, 0) \in \mathrm{Ker}(f)$ et $(1, 1) \in \mathrm{Im}(f)$
- [ ] $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{R}^2$ et $(1, 1) \in \mathrm{Im}(f)$
- [ ] $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((0, 1))$ et $\mathrm{Im}(f) = \{(1, 1)\}$
- [ ] $(1, 1) \in \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$
- [ ] $\mathrm{Ker}(f) = \{(0, 0)\}$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}((1, 0))$

Correction : L'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \to (y, 0)$ vérifie $(1, 0) \in \mathrm{Ker}(f)$ et $(1, 0) \in \mathrm{Im}(f)$. Les autres sont exclus par le théorème du rang.

Pour les **Questions 4, 5 et 6** ci-dessous on donne les vecteurs $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^2$ comme sur le dessin suivant :



Soit $P \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B} = v_1, v_2$ de $\mathbb{R}^2$. On note aussi :

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \rho & \sigma \end{pmatrix}.$$

Question 4 (1 point) Parmi les affirmations suivantes, une seule est vraie : laquelle ?

- ■ $v_3 \in \mathrm{Vect}(v_1 + v_2)$
- ☐ $v_2 - v_1 \in \mathrm{Vect}(v_3)$
- ☐ $v_1 \in \mathrm{Vect}(v_2 + v_3)$
- ☐ $v_2 \in \mathrm{Vect}(v_1)$

Correction : On construit $v_1 + v_2$ par la règle du parallélogramme et on vérifie qu'il est aligné avec $(0,0)$ et v_3.

Question 5 (1 point) Parmi les affirmations suivantes, une seule est vraie : laquelle ?

- ☐ $\alpha < 0$
- ☐ $\beta > 1$
- ■ $\gamma < 1$
- ☐ $\delta > 0$

Correction : Comme $v_1 = \alpha(1,0) + \gamma(0,1)$ et $v_2 = \beta(1,0) + \delta(0,1)$, on décompose v_1 et v_2 sur la base canonique (en faisant apparaitre des parallélogrammes), et on regarde les coefficients obtenus.

Question 6 (1 point) Parmi les affirmations suivantes, une seule est vraie : laquelle ?

- ■ $\frac{1}{2} < \rho < 1$
- ☐ $\rho < 0$
- ☐ $0 < \rho < \frac{1}{2}$
- ☐ $\rho > 1$

Correction : Comme $(1,0) = \lambda v_1 + \rho v_2$ on décompose $(1,0)$ sur v_1, v_2 (en faisant apparaitre des parallélogrammes), et on regarde le deuxième coefficient obtenu.

Question 7 (2 points) On considère l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,,\ (x, y) \to (6x + 5y, -5x - 4y)$$

Pour quelle base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ ci-dessous la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$ est-elle sous forme réduite ?

- ☐ $\mathcal{B} = (1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}), (1, \sqrt{2})$
- ■ $\mathcal{B} = (5 + 5\sqrt{2}, -5 - 5\sqrt{2}), (1, \sqrt{2})$
- ☐ $\mathcal{B} = (\sqrt{2} + 1, -\sqrt{2} - 1), (\sqrt{2}, 1)$
- ☐ $\mathcal{B} = (6\sqrt{2} + 5, -5\sqrt{2} - 4), (\sqrt{2}, 1)$

Correction : La forme réduite $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *de* f *est obtenue dans la base* $\mathcal{B} = v_1, v_2$ *lorsque* v_2 *n'est pas vecteur propre et* $v_1 = f(v_2) - v_2$.

Question 8 (1 point) On considère l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,,\ (x, y) \to (7x - 2y, 19x - 5y)$$

Parmi les matrices suivantes, laquelle est une forme réduite de f ?

- ■ $\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

Correction : Le polynôme caractéristique de f *est* $X^2 - 2X + 3 = (X - 1)^2 + (\sqrt{2})^2$.

Question 9 (2 points) Parmi les valeurs de n proposées ci-dessous sélectionner celle pour laquelle on a $A^n = I_2$, où :

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}.$$

- ☐ $n = 15$
- ☐ $n = 25$
- ☐ $n = 44$
- ■ $n = 36$

Correction : f *admet ici pour forme réduite la matrice de rotation d'angle* $R_{\frac{\pi}{3}}$.

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Sauf indication contraire, votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 10: *Cette question est notée sur 8 points.*

.5 .5 .5 .5 .5 .5 .5 .5

0 1 2 3 4 5 6 7 8

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire donnée par :

$$f(x, y) = (4x - 2y, 3x - 3y).$$

Soit la base $\mathcal{B} = (1, 3), (2, 1)$ de $\mathbb{R}^2$.

(a) Donner la matrice de f en base canonique. Déterminer son rang, son image et son noyau.

(b) Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, trouver l'ensemble des antécédents $f^{-1}(\{(u, v)\})$.

(c) Déterminer la matrice $[f]_{\mathcal{B}}$.

(d) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $[(x, y)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $[f(x, y)]_{\mathcal{B}}$ et $[f(x, y)]_{\mathcal{B}_{can}}$.

(e) Existe-t-il une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ telle que

$$[f]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ?$$

Justifier la réponse.

Solution

(a) On a :

$$[f]_{\mathcal{B}_{can}} = A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de cette matrice ne sont pas proportionnelles, si bien que f est de rang 2. On en déduit directement :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{Ker}(f) = \{(0, 0)\}.$$

(b) f est bijective et donc inversible, avec inverse donné par :

$$[f^{-1}]_{\mathcal{B}_{can}} = A^{-1} = \frac{1}{-6} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Il vient alors :

$$(x, y) \in f^{-1}(\{(u, v)\}) \quad \Leftrightarrow \quad f(x, y) = (u, v) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{-1}{6} \begin{pmatrix} -3u + 2v \\ -3u + 4v \end{pmatrix}$$

et donc :

$$f^{-1}(\{(u, v)\}) = \left\{ \frac{-1}{6}(-3u + 2v, -3u + 4v) \right\}.$$

(c) Un calcul direct donne :

$$[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = \frac{1}{-5}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(d) D'après une formule vue au cours, on sait que :

$$[f(x,y)]_{\mathcal{B}} = [f]_{\mathcal{B}}[(x,y)]_{\mathcal{B}}.$$

D'après le (c) on obtient alors :

$$[f(x,y)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

On peut alors convertir ces coordonnées en coordonnées canoniques via la formule :

$$[f(x,y)]_{\mathcal{B}_{can}} = P[f(x,y)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(e) Non, une telle base n'existe pas. En effet, l'existence d'une telle base signifierait que f est diagonalisable avec valeurs propres 0 et -2, ce qui n'est pas le cas, puisque son polynôme caractéristique est :

$$(X-3)(X+2) \neq X(X+2).$$

On peut aussi observer par exemple que, peu importe la base $\mathcal{B}'$ considérée, le rang de la matrice $[f]_{\mathcal{B}'}$ est 2 (contrairement à celui de la matrice proposée, qui est 1), ou encore que sa trace est 1, etc.

Question 11: *Cette question est notée sur 7 points.*

☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5 ☐.5
■0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = \alpha\,,\; u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,\; u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n\,.$$

(a) On suppose dans cette partie que $\alpha = 0$. Calculer la valeur de u_n en fonction de n.

(b) Trouver α sachant que la suite $\left(\dfrac{u_n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite finie, et calculer cette limite.

Solution On considère l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\,,\; (x, y) \to (5x - 6y, x)$$

de matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

en base canonique. On a alors :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\,u_{n+1} - 6\,u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

ce qui entraine :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A \cdot \ldots \cdot A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

(a) Pour le choix de $\alpha = 0$, on voit que u_n est le coefficient en bas à gauche de A^n, puisque :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On procède maintenant à la réduction de f. Pour cela, on commence par calculer son polynôme caractéristique :

$$\chi_f(X) = X^2 - \mathrm{tr}AX + \det A = X^2 - 5X + 6 = (X-2)(X-3).$$

On voit donc que f possède 2 valeurs propres distinctes : elle est diagonalisable. Cherchons une base $\mathcal{B}$ de vecteurs propres. Pour cela, on calcule :

$$A - 2\,I_2 = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

D'après la décomposition colonne-ligne que l'on vient d'écrire, on sait que :

$$\mathbf{Ker}(f - 2\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})\; : x - 2y = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{Ker}(f - 3\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) = \mathbf{Vect}((3,1)).$$

La base $\mathcal{B} = (2,1), (3,1)$ de $\mathbb{R}^2$ est donc propre pour f. Calculons à présent la matrice A^n. Pour cela, on écrit d'abord :

$$[f]_{\mathcal{B}} = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ce qui entraine :

$$A^n = \left(P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1}\right)^n = P \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 3^{n+1} \\ 2^n & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}.$$

Finalement, on obtient donc :

$$u_n = 3^n - 2^n.$$

(b) Partons de la formule :

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix}.$$

En injectant l'expression de A^n trouvée au (a), on obtient :

$$u_n = 3^n - 2^n + \alpha(3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n) = (3\alpha - 1)\, 2^n + (1 - 2\alpha)\, 3^n$$

ce qui entraine :

$$\frac{u_n}{2^n} = (3\alpha - 1) + (1 - 2\alpha) \left(\frac{3}{2}\right)^n$$

Pour que cette suite possède une limite finie, il faut donc que α soit égal à $\frac{1}{2}$, auquel cas la limite recherchée est $\frac{1}{2}$.